Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 *- Prof. D. Pasetto*

Tema A - 24/01/2022

Tempo a disposizione: 2h 30min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $x^2y' = -(x^2-4)(y-2)^3$.

1.2 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(1) = \frac{5}{3}$ e determinarne il dominio di esistenza.

1.3 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 3$ e determinarne il dominio di esistenza.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \left(\frac{4}{t}\cos(\pi t), \frac{4}{t}\sin(\pi t)\right), & \text{se } t \in [1\ ,\ 4]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (-5t+21, \quad 0)\,, & \text{se } t \in \,]4\ ,\ 5] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 2$.

2.4 Sia $f(x,y) = \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{3/2}$. Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x,y) = x^2y + 2y^3 - 4y$.

3.1 Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $x = 0$. Disegnare, se possibile, la curva di livello a $z = 0$

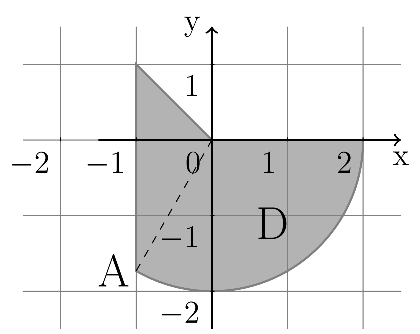
3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1,-1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$. Il vertice A ha coordinate $A = (-1, -\sqrt{3})$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare:

$$I_1 = \int\int_D dx\,dy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\,dx\,dy$$



Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $x^2y' = -(x^2-4)(y-2)^3$.

(4 Punti) L'equazione differenziale ordinaria è del primo ordine a variabili separabili. Si nota che $y = 2$ è soluzione costante dell'equazione. Inoltre, per $x = 0$ si ottiene come unica soluzione $y = 2$. Si considera quindi $y \neq 2$ e $x \neq 0$, si separano le variabili e si integrano ambo i membri:

$$\begin{aligned}\int \frac{y'}{(y-2)^3}\,dx &= \int -1 + \frac{4}{x^2}\,dx\\ -\frac{1}{2}(y-2)^{-2} &= -x - \frac{4}{x} + c \qquad ,c \in \mathbb{R}\\ (y-2)^2 &= \frac{x}{2x^2-2cx+6}\\ |y-2| &= \sqrt{\frac{x}{2x^2-2cx+8}}\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni hanno la forma

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{\frac{x}{2x^2-2cx+6}} & \text{se } y > 2\\ y = 2 - \sqrt{\frac{x}{2x^2-2cx+6}} & \text{se } y < 2\end{cases}$$

a cui va aggiunta la soluzione costante se $y = 2$.

1.2 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(1) = \frac{5}{3}$ e determinarne il dominio di esistenza.

(2 punti) Bisogna considerare la seconda soluzione e imporre le condizioni iniziali:

$$\frac{5}{3} = 2 - \sqrt{\frac{1}{10-2c}} \implies \frac{1}{9} = \frac{1}{10-2c} \implies c = \frac{1}{2}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y = 2 - \sqrt{\frac{x}{2x^2-x+8}}$

Il dominio è dato da

$$\frac{x}{2x^2-x+8} \geq 0$$

da cui si ottiene

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$$

Sebbene la funzione sia definita in $x = 0$, la funzione non è differenziabile in $x = 0$, per cui tale punto viene escluso dal dominio della soluzione (infatti, questa soluzione si è ottenuta partendo dall'ipotesi $x \neq 0$).

1.3 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 3$ e determinarne il dominio di esistenza.

(1 punto) Non esiste alcuna soluzione che soddisfa tale condizione. Infatti, sostituendo nell'equazione differenziale $x = 0$ si ottiene $y = 2$. Cioè, non può essere che la soluzione y assuma un valore diverso da 2 per $x = 0$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \left(\frac{4}{t}\cos(\pi t), \frac{4}{t}\sin(\pi t)\right), & \text{se } t \in [1\ ,\ 4]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (-5t+21, \quad 0)\,, & \text{se } t \in]4\ ,\ 5] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

(2 punti)

Continuità, chiusura, semplicità e regolità si possono dedurre facilmente dal grafico del supporto.

$\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono continue. Inoltre

$$\mathbf{r}_1(4) = (1,0) = \mathbf{r}_2(4)$$

quindi anche γ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_1(1) = (-4,0)$ e $\mathbf{r}(5) = \mathbf{r}_2(5) = (-4,0)$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, conviene partire dal supporto dei due archi di curva: $\mathbf{r}_1$ è in forma polare con il raggio che decresce in $[1,4]$, quindi è semplice. La curva $\mathbf{r}_2$ descrive un segmento orizzontale, da (1,0) a (-4,0), quindi è semplice.

Le due curve si intersecano in $(-4/3,0)$, e si ha

$$\mathbf{r}_1(3) = (-1,0) = \mathbf{r}_2(13/3) \implies t_1 = t_2$$

Si è trovato che prendendo $t_1 = 3$ e $t_2 = 13/3$ si ha $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, quindi la parametrizzazione NON è semplice.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente a $\mathbf{r}_1$,

$$\mathbf{r}_1'(t) = \frac{4}{t^2}\left(-t\pi\sin(\pi t) - \cos(\pi t), t\pi\cos(\pi t) - \sin(\pi t)\right)$$

e a $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_2'(t) = (-4,0)$$

Il secondo arco è regolare. Per il primo arco, la velocità di $\mathbf{r}_1$ è $\|\mathbf{r}_1'(t)\| = \frac{4}{t^2}\sqrt{1+\pi^2 t^2}$, che non si annulla mai, quindi anche il primo arco è regolare.

Per capire se $\mathbf{r}(t)$ è regolare, bisogna analizzare cosa succede in $t=4$: la derivata prima passa da $\mathbf{r}_1'(4) = \frac{1}{4}(-1,4\pi)$ a $\mathbf{r}_2(4) = (-4,0)$, quindi il vettore tangente a γ non è definito in $t=4$, e γ è regolare a tratti.

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza.

(2 punti) $\mathbf{r}_1(t)$ è una curva in forma polare con raggio $4/t$. Il suo supporto è una spirale che parte da $(-4,0)$ e si restringe in senso antiorario fino al punto $(1,0)$.

$\mathbf{r}_2(t)$ è un segmento della retta orizzontale $y=0$ percorso da $x=1$ a $x=-4$.

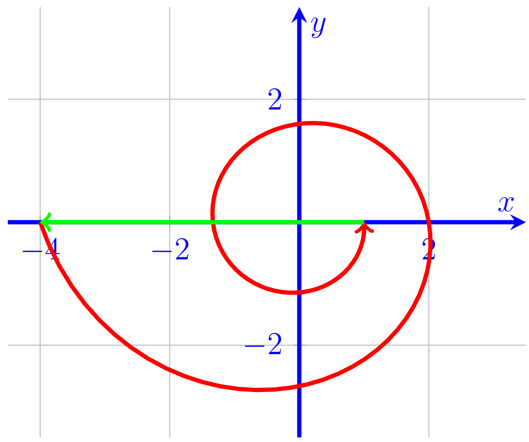


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde).

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 2$. (2 punti)

Si ha $\mathbf{r}(2) = (2, 0)$ e $\mathbf{r}'(\pi) = (-1, 2\pi)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = 2 - (t-2) = -t + 4 \\ y(t) = 2\pi(t-2) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $y = -2\pi x + 4\pi$.

2.4 Sia $f(x, y) = \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{3/2}$. Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$ (2 punti)

Il dominio di $f(x, y)$ è $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, quindi il supporto della curva è contenuto nel dominio.

$$\int_{\mathbf{r}_1} f(x, y)\, d\mathbf{s} = \int_1^4 f\left(\frac{4}{t}\cos(\pi t), \frac{4}{t}\sin(\pi t)\right)\|\mathbf{r}_1'\|\, dt \tag{1}$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{t^2}{16}\right)^{3/2} \frac{4}{t^2}\sqrt{1+\pi^2 t^2}\, dt = \tag{2}$$

$$= \int_1^4 \frac{t}{16}\sqrt{1+\pi^2 t^2}\, dt = \tag{3}$$

$$= \left[\frac{1}{48\pi^2}(1+\pi^2 t^2)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{1}{48\pi^2}\left(\sqrt[2]{(1+16\pi^2)^3} - \sqrt[2]{(1+\pi^2)^3}\right) \tag{4}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = x^2 y + 2y^3 - 4y$.

3.1 Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $x = 0$. Disegnare, se possibile, la curva di livello a $z = 0$

(3 punti)

Il dominio di f è $D_f = \mathbb{R}^2$ e la funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ in quanto funzione polinomiale in x e y (anche $\mathcal{C}^\infty$).

Il grafico della sezione è mostrato in Figura 2; il grafico della curva di livello è mostrato in Figura 3.

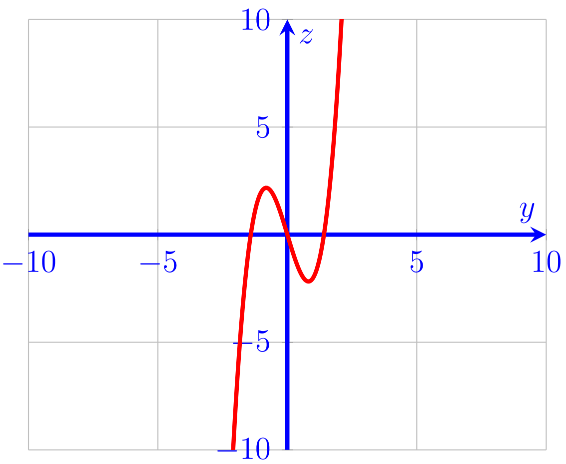


Figura 2: Sezione $x = 0$, $z = 2y^3 - 4y$

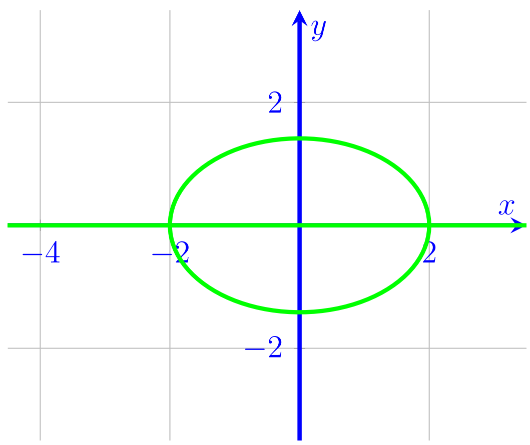


Figura 3: Curva di livello $f(x, y) = 0$ (retta $y =$ e ellisse di centro l'origine e assi 2, $\sqrt{2}$)

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

(4 punti)

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 6y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y) = 0$ si ottiene dalla prima equazione $x = 0$ oppure $y = 0$.

Per $x = 0$, dalla seconda equazione si ottiene $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Per $y = 0$, dalla seconda equazione si ottiene $x = \pm 2$.

I punti critici quindi sono: $P_1 = (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$, $P_2 = (0, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $P_3 = (2, 0)$, $P_4 = (-2, 0)$.

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 12y \end{pmatrix}$$

- P_1: $H_f(0, \sqrt{\frac{2}{3}}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 12\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$, det $(H_f(0, \sqrt{\frac{2}{3}})) = 32$ e il primo termine di $H_f(0, \sqrt{\frac{2}{3}})$ vale $\sqrt{\frac{2}{3}} > 0$, quindi H_f è definita positiva in P_1 e P_1 è minimo locale.
- P_2: $H_f(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & -12\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$, det $(H_f(0, -\sqrt{\frac{2}{3}})) = 32$ e il primo termine di $H_f(0, -\sqrt{\frac{2}{3}})$ vale $-\sqrt{\frac{2}{3}} < 0$, quindi H_f è definita negativa in P_2 e P_2 è massimo locale.
- P_3: $H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, det $(H_f(\sqrt{3}, 0)) = -16$ quindi H_f è indefinita in P_3 e P_3 è punto di sella.
- P_4: $H_f(-2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, det $(H_f(-\sqrt{3}, 0)) = -16$ quindi H_f è indefinita in P_4 e P_4 è punto di sella.

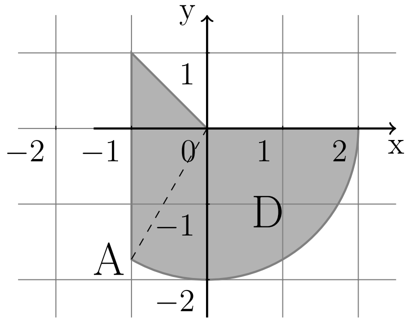
3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1, -1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

(2 punti)

Il versore di massima crescita corrisponde al gradiente calcolato in $(-1, -1)$ e normalizzato: $\nabla f(-1, -1) = (2, 3)$ che ha norma $\sqrt{13}$. Quindi $\mathbf{v} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$.

Il piano tangente ha equazione $z = 2(x + 1) + 3(y + 1) + 1$.

Problema 4 (6 punti)



Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$. Il vertice A ha coordinate $A = (-1, -\sqrt{3})$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare:

$$I_1 = \int\int_D dx\,dy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\,dx\,dy$$

Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \cup D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta),\ -\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq 0, 0 \leq \rho \leq 2\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, \sqrt{3}x \leq y \leq -x\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_{-2\pi/3}^{0} \left(\int_0^2 \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{2}{3}\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{\sqrt{3}x}^{-x} 1\,dy\right) dx = \int_{-\sqrt{-1}}^{0} -x - \sqrt{3}x\,dy = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}[x^2]_{-1}^{0} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Quindi l'area di D vale $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$ (dominio corretto+ area, 4 punti).
Per il secondo integrale:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} xy\,dx\,dy &= \int_{-2\pi/3}^{0} \left(\int_0^2 \rho^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\,d\rho\right) d\theta = \\ &= \left(\int_{-2\pi/3}^{0} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^2 \rho^3\,d\rho\right) \\ &= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_{-2\pi/3}^{0} [\rho^4/4]_0^2 = (-\frac{1}{4} - \frac{1}{8})4 = -3/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} xy\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{\sqrt{3}x}^{-x} xy\,dy\right) dx = \\ &= \int_{-1}^{0} x\,[y^2/2]_{\sqrt{3}x}^{-x}\,dx = \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{1-3}{2} x^3\,dx = \\ &= [-\frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Quindi I_2 vale $-5/4$ (2 punti))